



TITLE:

旋回流中の非線形波動と砕波(計算流体力学に関する数理的諸問題)

AUTHOR(S):

花崎, 秀史

CITATION:

花崎, 秀史. 旋回流中の非線形波動と砕波(計算流体力学に関する数理的諸問題). 数理解析研究所講究録 1996, 974: 230-241

ISSUE DATE:

1996-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60753>

RIGHT:

旋回流中の非線形波動と碎波

国立環境研究所 花崎秀史*

1 はじめに

円管内を流れる旋回流中の波動(慣性波動)は, 流体が円管の中心軸の回りをぐるぐるまわっていることからくる, 遠心力により生じる(図1参照). ここでは, 軸対称な旋回流中に物体により励起された波についての数値シミュレーション結果^{1,2,3)}について報告する. また, 波の振幅が大きくなり碎波の起こるような状況に注目し, 種々の理論(弱非線形理論⁴⁾, 強非線形理論⁵⁾)との比較を行う. さらに, 同様の系で報告されている vortex breakdown(渦崩壊現象)との関連についても触れる.

2 線形波動 一波の上流伝播と下流の定在波一

まず, 線形理論を考える. 簡単な例として剛体回転, すなわち上流での旋回流速が $w = r\Omega$ (Ω は定数)と表される場合を考える. この場合, 流れ関数 $\psi(x, r, t)$ は,

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 + Bf(r) \sin[k(x + C_p t)], \quad (1)$$

(B は, 任意の定数)と書ける.(1)の右辺第2項が'波'を表す. C_p は波の左向きにの位相速度, k は波の中心軸方向の波数である. また, $f(r)$ は,

$$f(r) = rJ_1 \left\{ \left(\frac{4\Omega^2}{C_p^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} r \right\}, \quad (2)$$

である. J_1 は, 第一種のベッセル関数である. ここで, 半径 b の円管内の流れの場合, 円管壁上では振幅0でなければならないから, $f(b) = 0$ が要求される. この条件から n 番目のモードの位相速度 C_p は,

$$C_p = \frac{2b\Omega}{\sqrt{\gamma_n^2 + b^2k^2}}, \quad (3)$$

と求まる. γ_n は, 第一種ベッセル関数の n 番目のゼロ点である. 波の位相速度 C_p と振動数 ω との間には $\omega = C_p k$ の関係があるから, 群速度 $C_g = \partial\omega/\partial k$ と位相速度の間には,

$$\begin{aligned} C_g &= \frac{2b\Omega\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + b^2k^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= C_p \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + b^2k^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

* 〒305 つくば市小野川16-2, e-mail:hanazaki@sun10a.nies.go.jp

の関係がある。これより、 $k \neq 0$ の時、群速度は位相速度よりも、常に小さいことがわかる。また、 C_p も C_g も $k = 0$ (長波長極限) で最大になり、その値は、

$$C_n \equiv C_p(k=0) = C_g(k=0) = \frac{2b\Omega}{\gamma_n}, \quad (5)$$

である。この値は、モード n が大きくなるほど小さくなることから、旋回流中で最も伝播速度が速い波は、 $n = 1$ のモードの、中心軸方向の波長が無限大の波であることがわかる。その伝播速度は、 $C_1 \equiv 2b\Omega/\gamma_1$ であり、 $C_1 > U$ の時、主流に逆らって $C_1 - U$ の速さで物体の上流へ伝播することになる。フルード数 F を

$$F \equiv U/C_1, \quad (6)$$

で定義すると、線形の波は、 $F < 1$ (subcritical) の時、上流伝播を起こす。逆に、 $F > 1$ (supercritical) の時は、すべてのモード $n \geq 1$ の群速度が主流速よりも遅いため、上流伝播は起こらないことになる。また、 $F = 1$ (resonant: 共鳴) の時は、 $C_1 - U = 0$ のため $n = 1$ のモードのエネルギーが時間と共に物体近傍に溜ることから、線形理論による解は発散する。したがって、この場合は、非線形効果を考える必要がある。より一般には、 $C_n = U$ の近傍では n 番目のモードが共鳴するため、そのモードの振幅が最大となることが予想される。

物体下流の定在波は、 $C_p(k_s) = U$ (波の位相が止まって見える条件) を満たす波数 k_s を持つ。また、この時 $U = C_p(k_s) > C_g(k_s)$ だから、 $U - C_g(k_s) > 0$ であり、波のエネルギーは励起源 (物体) よりも下流へ伝播していく。これが、定在波が '下流' 側に立つ原因である。尚、波数 k_s に対応する定在波の軸方向の波長 $\lambda_s = 2\pi/k_s$ は、

$$\lambda_s = \frac{2\pi b}{\gamma_n \left[\left(\frac{C_n}{U} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (7)$$

である。 $C_p(k=0) = C_g(k=0) > C_p(k_s)$ であるから、定在波がある時には、それと同じモードの長波長成分 ($k=0$) が必ず上流伝播する。すなわち、上流と下流の波は、同時に存在しなければならない。

以上の線形波動の伝播に関連した現象の概要を表現したのが図2である。

3 非線形波動

3.1 弱非線形理論 — forced KdV 方程式 —

§2 で述べたように、共鳴条件 (resonant) の時には、非線形効果を考える必要がある。長波長近似 (中心軸方向の代表的波長を L として、 $\epsilon = (b/L)^2 \ll 1$ とする近似) の弱非線形理論 (KdV 型) は、Grimshaw⁴⁾ により、中心軸上の物体あるいは、円管壁の変形の効果を外力 (forcing) として含む形で forced-KdV 方程式として導出された。結果だけ書くと n 番目のモードの共鳴条件近傍 ($U = C_n + \epsilon\Delta$) での、流れ関数は、(尚、以下では簡単のため、 $b = 1$ とする)

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 - \epsilon A_n(X, T)f_n(r) + O(\epsilon^2), \quad (8)$$

の形に書ける。ここで、 X, T は、 $X = \epsilon^{\frac{1}{2}}x$, $T = \epsilon^{\frac{3}{2}}t$ であり、 f_n は、 n 番目のモードの動径 (r) 方向の分布関数で、方程式

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} \right) + \frac{1}{C_n^2} \frac{4\lambda}{r} f_n = 0, \quad (9)$$

の解として与えられる。ここで,

$$\lambda = \frac{1}{4r^3} \frac{d(r^2 W^2)}{dr}, \quad (10)$$

($W(r)$: 上流での旋回流速) であり, また, 流れの円管壁上および中心軸上での境界条件から,

$$f_n(0) = f_n(1) = 0, \quad (11)$$

でなければならない。(9) と (11) は, Sturm-Liouville 型の固有値問題になっていて, $f_n(r)$ が固有関数, C_n が固有値である。 $f_n(r)$ が, 動径方向の波の構造を表すが, これは (10) の λ によって決まるので, 結局, 旋回流速分布 $W(r)$ によって決定されると言える。そして, $A(X, T) \equiv A_n(X, T)$ は, 次の forced KdV 方程式に支配される。

$$-(A_T + \Delta A_X) + a_1 A A_X + a_2 A_{XXX} + G_X = 0. \quad (12)$$

ここで,

$$a_1 = -8 \int_0^1 \frac{1}{r^2} \frac{d\lambda}{dr} f_n^3 dr / L_n, \quad (13)$$

$$a_2 = C_n^3 \int_0^1 \frac{1}{r} f_n^2 dr / L_n, \quad (14)$$

で, L_n は,

$$L_n = 8 \int_0^1 \frac{\lambda}{r} f_n^2 dr, \quad (15)$$

である。外力項 $G(X)$ は, 物体が中心軸上にある場合には, 物体の形を

$$r = \epsilon g(X), \quad (16)$$

のようにスケーリングして,

$$G(X) = C_n^3 \left(\frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} \right)_{r=0} \frac{1}{2} U g(X)^2 / L_n, \quad (17)$$

また, 円管壁が変形している場合は, その形を

$$r = 1 + \epsilon^2 g(X), \quad (18)$$

のようにスケーリングして,

$$G(X) = -C_n^3 \left(\frac{df_n}{dr} \right)_{r=b} U g(X) / L_n, \quad (19)$$

である。一般の旋回流速の場合には, この fKdV 方程式が適用できる。しかし, 全領域が剛体回転 ($W = r\Omega$) の場合, (10) の $\lambda = \Omega^2 = \text{定数}$ であるから, $d\lambda/dr = 0$ である。したがって, (13) から, fKdV 方程式の非線形項の係数 $a_1 = 0$ となり, 非線形効果が消えてしまう。剛体回転の場合は, 実は, KdV 型の弱非線形方程式の非線形項は, 高次の非線形項 ($A^2 A_X$ など) も含めてすべて消えてしまう (Grimshaw⁴⁾)。したがって, 別の取扱いをしないと行けない。剛体回転の場合は, 定常状態の方程式は線形になるというありがたい性質を持っている一方, 非定常の場合には, 通常の弱非線形理論が役に立たないという困った状況におちいる。そこで, 考え出されたのが次の Grimshaw-Yi⁵⁾ の方程式である。

3.2 強非線形理論 — Grimshaw-Yi の方程式 —

旋回流速が剛体回転の場合の共鳴条件近傍 ($U = C_n + \epsilon\Delta$) での'強'非線形波動を記述するのが, Grimshaw-Yi の方程式である. 流れ関数 ψ を

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 + A_n(X, T)f_n(r) + O(\epsilon), \quad (20)$$

$$f_n(r) = rJ_1(\gamma_n r), \quad (21)$$

と書き, x, t は forced KdV 方程式の場合と同様にスケーリングする. また, 物体あるいは円管の変形を

$$r = \epsilon^{\frac{1}{2}}g(X), \quad (22)$$

あるいは,

$$r = 1 + \epsilon g(X), \quad (23)$$

のようにスケーリングする. (20) からわかるように, 流れ関数に対する波の摂動は軸方向の主流と同じ ϵ^0 のオーダーであり, この意味で, この理論は大振幅波動を記述する強非線形理論である. こうして得られる方程式は, 物体が中心軸上にある時,

$$-\frac{2I_n\gamma_n^3}{|2\Omega|} \left(\int_{-\infty}^X K(A, A') \frac{\partial A'}{\partial T} dX' + \Delta A \right) + I_n A_{XX} - \frac{1}{2}\gamma_n U g(X)^2 \left(1 + \frac{\gamma_n^2 A}{|2\Omega|} \right) = 0, \quad (24)$$

円管が局所的に変形している時,

$$-\frac{2I_n\gamma_n^3}{|2\Omega|} \left(\int_{-\infty}^X K(A, A') \frac{\partial A'}{\partial T} dX' + \Delta A \right) + I_n A_{XX} + |2\Omega|J_0(\gamma_n)g(X) \left(1 + \frac{\gamma_n^2 J_0(\gamma_n)A}{|2\Omega|} \right) = 0, \quad (25)$$

である. ここで,

$$I_n = \frac{1}{2}J_0^2(\gamma_n), \quad (26)$$

$$A' = A'(X', T), \quad (27)$$

であり, 積分核 $K(A, A')$ は,

$$K(A, A') = \frac{|2\Omega|}{2I_n\gamma_n} \left(\int_0^{\frac{C_n}{2}} \left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial A} \frac{\partial r'}{\partial A'} d\phi \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{C_n}{2}} \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial A'} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(r \frac{\partial r}{\partial A} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial A} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(r' \frac{\partial r'}{\partial A'} \right) \right] \phi d\phi \right), \quad (28)$$

である. また, ここで現れた新しい独立変数 $\phi = \phi(r, A)$ は,

$$\phi \equiv \frac{1}{2}C_n r^2 + A(X, T)f_n(r), \quad (29)$$

で与えられる. ところで, 逆変換 $r = r(\phi, A)$ が存在するためには,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = C_n + \frac{A}{r} \frac{df_n}{dr} \neq 0, \quad (30)$$

がすべての r ($0 \leq r \leq 1$) に対して成立している必要がある。(21) を使うと、この関係は、

$$-\frac{C_n}{\gamma_n} < A < \frac{C_n}{\gamma_n |J_0(\gamma_1)|}, \quad (31)$$

と同値であることがわかる。(20) と (29) を比べてみると、 ϕ は、流れ関数 ψ と、 $O(\epsilon)$ の差を除けば同じである。したがって、条件 (30) は近似的に、中心軸方向の主流が 0 になる (逆流が始まる) 条件と同等である。尚、(31) で、 A の値が下限の値以下になると、 $r = 0$ で逆流が生じ、上限の値以上になると、 $r = \gamma_1/\gamma_n$ で逆流が生じることもわかる。 $J_0(\gamma_1) = -0.40276$ であるから、 A の上限値は下限値の絶対値に比べて約 2.5 倍大きい。また、(24) の外力項は、 A が下限値に達した時に 0 になり、(25) の外力項は、モード $n = 1$ に対して、 A が上限値に達した時に 0 になることがわかる。このことから、振幅が大きくなり、碎波 (逆流の発生) が近づくにつれて、外力項による波の励起が弱くなり、振幅の増加が遅くなることが予想される。

4 数値シミュレーション — ナビエ・ストークス方程式の解 —

4.1 剛体回転の場合 — Grimshaw-Yi 方程式との比較 —

4.1.1 振幅の小さい場合

剛体回転の場合、中心軸上の物体もしくは円管壁の変形により励起される波は、共鳴条件 ($U = C_1$) 近傍で Grimshaw-Yi の方程式によって記述されることが期待される。そこで、ここでは、ナビエ・ストークス方程式の解と Grimshaw-Yi の方程式 (強非線形理論) の解の比較を行った結果についての報告^{1,3)}を行う。ナビエ・ストークス方程式の解は、すべて差分法を用いて解いた結果である。また、境界条件は円管壁上と物体上では free-slip の条件を課している。レイノルズ数 Re は、円管の半径で定義して $Re = 10000$ である。

まず Grimshaw-Yi の方程式の有効性を検証するため、中心軸上 ($r = 0$) に軸対称物体 ($r = h_0 \operatorname{sech}^2(0.4x)$, $h_0 = 0.05$) を置いて $F \simeq 1$ 付近 ($F = 0.9, 0.95, 1.0, 1.05$) で計算した結果の流線 (時刻 $t = 200$) が図 3 である。まず、 $F = 0.9$ の場合には、 $C_1 > U$ であるから、上流へ向かう長波長の (線形の) 波の位相速度と群速度が軸方向の主流の流速よりも大きく、物体上流への波の伝播が見られる。ただし、 $F = 0.9$ では、 $F = 1$ からのずれが大きいため (subcritical), 上流下流ともに波の振幅は小さい。 $F = 0.95$ になると、流れは共鳴条件 (resonant) に近づき、 $n = 1$ のモードの波のエネルギーが物体から上流へ離れる速度が遅くなるため、波のエネルギーが物体の近傍にたまり、振幅が大きくなる。 $F = 1.0$ では、流れは共鳴条件を満たし、線形解 (および非線形の定常解) は発散するが、非定常ナビエ・ストークス方程式の解はもちろん発散しない。しかし、剛体回転の場合、非線形効果による波の伝播速度の変化は少ないので、上流への波の伝播は長時間の後でも見られない。 $F = 1.05$ になると、流れは supercritical となり、上流への波の伝播はなく、また、すべての波長の成分が下流へながされてしまうため (すべての k に対し、 $C_g(k) < U$)、下流の定在波も存在しなくなる。

ナビエ・ストークス方程式の解と Grimshaw-Yi 方程式の解との直接的な比較をおこなうため、得られた速度分布から Grimshaw-Yi 方程式の振幅 $A_1(X, T) \equiv A(X, T)$ の時間発展を計算したものが図 4、また、対応する Grimshaw-Yi 方程式の解を示したのが図 5 である。図 4 と図 5 は、若干の差はあるものの、フルード数 F による波のパターンの変化、波の振幅と伝播速度など、定量的にもかなりよい一致を示している。また、下流の定在波の波長は、剛体回転の場合、線形理論 (6) によって与えられ、 $F = 0.9$ では、 $\lambda = 3.39b$, $F = 0.95$ で

は, $\lambda = 4.98b$ となるが, 図3~図5の結果は, ほぼこれと一致している. また, 上流への波の伝播速度も, 線形理論では $C_1 - U = (1/F - 1)U$ であるから, $F = 0.9$ の時 $0.11U$, $F = 0.95$ の時, $0.053U$ であるが, これらの予測も図3~図5と一致している.

4.1.2 振幅の大きい場合 — 碎波の予測 —

上で見たように, $F = 0.95$ から 1.0 (共鳴条件) 付近で, 波の振幅は最大となるが, 一方, §3 で見たように, Grimshaw-Yi の方程式は, 波の振幅に関して強非線形の方程式で, 碎波 (軸方向の主流の逆流) が起こるまでは有効である. したがって, Grimshaw-Yi の方程式が $F \simeq 1$ での碎波の発生を予測できるかどうかは非常に興味のあるところである. そこで, 今度は, 円管壁の一部がへこんでいる場合 (変形の形は, $r = 1 - h_1 \operatorname{sech}^2(0.4x)$, $h_1 = 0.015$) に励起される波についての結果を示す. これは, 例えば, 半径 5cm の円管であれば, わずか 0.75mm のへこみに相当する. したがって, わずかな変形が以下のような大振幅の波動につながる. 従来の vortex breakdown の実験でも, 実験に用いた円管に, この程度の変形があった可能性も考えられ, 実験結果の解釈には注意を要するかもしれない.

図6には, $F = 1.0$ の場合の振幅 $A_1(x, t)$ の時間発展の様子を示した. ナビエ・ストークス方程式の解と Grimshaw-Yi 方程式の解の一致は, 円管の変形のすぐ下流での振幅 A が, Grimshaw-Yi 方程式が成立しなくなる (碎波が起こる) 下限の振幅に到達するまでは良好である. Grimshaw-Yi 方程式での解では, 下限値 $A (= -C_1/\gamma_1 = -0.26U)$ に時刻 $t = 92.45$ に $x = 4$ 付近で到達し, その時刻, 場所での碎波 (主流の逆流) の発生を予測する. そして, それ以上の時間発展は計算できない. 一方, ナビエ・ストークス方程式の解では, 振幅に制限はない. 今の場合, $t = 200$ で A の最小値は $A = -0.32$ まで減少する. しかし, 図7に示された流線を見ると, $t = 115$ で主流の逆流が中心軸上で発生し, 渦 (縦に細長く見えるが, 図の中心軸 (x) 方向は動径 (r) 方向に比べて $1/100$ に縮小しているので, 実際には横長の渦であることに注意.) が現れている. その発生位置は, $r = 0, x = 3.5$ であり, これは, Grimshaw-Yi 方程式の予測とよく一致している. 逆流 (渦) の発生時刻は, Grimshaw-Yi 方程式のほうが早くなっているが, 時間が経つにつれて振幅 A の増加率が小さくなることを考えれば, $t = 92.45$ と 115 の差は, 小さいと言える.

この渦の時間発展を詳しく見るため, 中心軸付近での流線を拡大 (この図では軸方向は動径方向に比べて $1/10$ に縮小されている.) して, 時間発展を示したのが図8である. 時刻 $t = 110$ までは渦の発生はないが, 時刻 $t = 115$ で発生すると, その後は急速に発達し, $t = 140$ では2個目の2次的な渦が発生するなど, この渦の中で, 流れは非定常性が強い. また, これらの渦の構造 (渦が2個ある'2セル構造') は, 従来の vortex breakdown の実験で観測されている構造⁶⁾と似ている. しかし, 時間がさらに経過して $t = 150$ を過ぎると, 渦は非常に複雑な構造となり, もはや軸対称性が実際の流体で維持されるとは考えにくい.

4.2 バーガース渦型の旋回流速の場合 — forced KdV 方程式との比較 —

バーガース渦型の旋回流速の場合, 中心軸上の物体もしくは円管壁の変形により励起される波は, 共鳴条件近傍では forced KdV 方程式によって記述されることが期待される. ここで用いた旋回流速分布は

$$W(r) = \frac{\sqrt{2B_1}(1 - e^{-\frac{1}{2}B_2r^2})}{r}, \quad (32)$$

ここで, $B_1 = 2.46W_{max}^2/B_2$, $B_2 = 27.3$ である. また, 円管の膨らみは $r = 1 + h_1 \operatorname{sech}^2(0.4x)$ ($h_1 = 0.05$) である. ここでは, ナビエ・ストークス方程式の解と forced KdV 方程式 (弱

非線形理論)⁷⁾の解の比較を行う。図9には、 $F = 1.0$ の場合に、ナビエ・ストークス方程式の解から得られた振幅 $A(x, t)$ の時間発展 (図9(a))、最終時刻 $t = 200$ における流線 (図9(b))、上流の中心軸付近での流線の時間発展 (図9(c)) を示した。また、これらに対応する forced KdV 方程式の解から得られる結果を図10に示した。

この場合、 $F = 1$ であるにもかかわらず、非線形効果により、長時間のうちに物体上流への孤立波 (solitary wave) の周期的放出が起こる。この孤立波の振幅、発生周期は、ナビエ・ストークス方程式の解と forced KdV 方程式の解は、かなりよい一致を示している。また、図9(a)、10(a)を見ればわかるように、上流へ出た孤立波の「質量」を補うために、円管のへこみのすぐ下流 ($x > 0$) には、時間と共に、ほぼ平らなくほみ ($A < 0$ の領域) がのびて行く。これは、forced KdV 方程式 (12) を $x = -\infty$ から $x = \infty$ まで x で積分すると、 $G(X)$ が $G(-\infty) = G(\infty) = 0$ を満たす (円管の変形が局在している) 限り、孤立波の「質量保存」が成立しているからである。

また、今の場合、上流の中心軸付近では、おのおのの孤立波の内部に渦が発生し、軸方向の主流の逆流が生じている (図9(c)、10(c))。この様子も、ナビエ・ストークス方程式の解と forced KdV 方程式の解で、渦の強さに差はあるものの、かなりよい一致を示している。波の振幅が比較的小さい場合はともかく、逆流がおこるほど大振幅の場合に弱非線形理論である forced KdV 方程式でよいのかという疑問がわく。これは、以下のように説明される。例えば、 $n = 1$ のモードを考える。Burgers 渦 (32) の場合 $\lambda > 0$ である。また、最大値が正であるように $f_1(r)$ を正規化したとすると $f_1(r)$ には腹は1個しかないから、 $f_1(r) \geq 0$ である。よって、(9) より、

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} \right) \leq 0, \quad (33)$$

が成り立つ。したがって、 $(1/r)(df_1/dr)$ は単調減少である。今の Burgers 渦の場合、 $(1/r)(df_1/dr)$ の値は、 $r = 0$ では約 125、 $r = b$ では -2.38 である。すなわち、 $(1/r)(df_1/dr)$ の値は、中心軸付近で非常に大きな値となる。波によって生じる中心軸方向の流速 u は、(8) からわかるように $-\epsilon A_1 (1/r)(df_1/dr)$ であるから、 $\epsilon A_1 > 0$ が小さくとも、 $(1/r)(df_1/dr)$ が大きければ、逆流が生じ得ることがわかる。(尚、 $f_1(r)$ の規格化の仕方は、この結果とは無関係である。 $f_1(r)$ を小さく規格化すると、反比例して A_1 が大きくなるだけだからである。)

尚、紙数の都合で割愛したが、円管の局所的なへこみがある場合 (forced KdV 方程式の外力項 $G(X)$ の符号が反対の場合)、孤立波は、 $F = 1$ では上流へはほとんど伝播せず、2個の孤立波 (渦) が $x = 0$ の付近で交差するなど、複雑な振舞いをする (ソリトンの通り抜けのような現象)。そのような場合でも、ナビエ・ストークス方程式の解と forced KdV 方程式の解の一致は良好である。

なお、以上の計算では、ナビエ・ストークス方程式を解く際に、旋回方向の粘性項を 0 にして計算している。この項を入れておくと、Burgers 型の旋回流速分布の場合、管の上流端の中心軸付近に短時間で渦が発生する。これは、この上流端の渦が、波とは無関係な、旋回方向の「粘性」によって生じていることを示唆している。同様の系で生じる「vortex breakdown」に関する従来の数値シミュレーションではすべて、管の上流端に渦が発生してたまり、それを室内実験の再現であるとしてきた^{7,8)}。しかし、そうした計算はすべて上流端の境界条件を破壊していることになるし、実験では、上流端で vortex breakdown が生じているわけでもない。また、実験では主流方向に管径が変化している管を用いている^{9,10,11,12)}。したがって、「粘性」の検討と「管径変化」の考慮が、vortex breakdown の今後の研究にとっては重要であろう。

5 結論

以上, 旋回流中の波動の, 物体などによる励起と伝播の基本的メカニズムと, 波の振幅が大きくなった時の碎波と渦の発生について, 理論とナビエ・ストークス方程式の数値解との比較を行なってきた. 線形理論で, 波の伝播速度, 下流の定在波の波長などの基本的部分がまず説明できる. しかし, 軸方向の主流速と (線形の) 波の速度が一致する共鳴条件近傍では, 旋回流速が剛体回転でない場合には外力項を持った forced KdV 方程式が弱非線形理論として有効である. また, 剛体回転の場合には, 定常状態に対する方程式が線形になる一方, 非定常状態では, KdV 型の非線形項が消えてしまうので従来型の弱非線形理論は役にたらず, 最近導出された強非線形理論である Grimshaw-Yi の方程式が碎波 (渦の発生) の予測まで有効である. 一方, 従来の vortex breakdown の数値シミュレーションに見られる管の上流端での渦の発生は, 旋回方向の「粘性」によるもので, 「波」とはおそらく関係のない vortex breakdown 現象の解明のためには, 従来の数値計算で見られた円管の上流端の渦の起源 (波なのか粘性によるのか) の解明と, 室内実験に正確に対応した (管径の変化も含めた) 数値シミュレーションが, 今後必要であろう.

6 参考文献

- 1) H. Hanazaki: Phys. Fluids A3 (1991) 3117-3120.
- 2) H. Hanazaki: Phys. Fluids A5 (1993) 568-577.
- 3) H. Hanazaki: J. Fluid Mech. (in press) (1996).
- 4) R. Grimshaw: Stud. Appl. Math. 83 (1990) 249-269.
- 5) R. Grimshaw & Z. Yi: Mathematika 40 (1993) 30-50.
- 6) J. H. Faler & S. Leibovich: J. Fluid Mech. 86 (1978) 313-335.
- 7) R. M. Kopecky & K. E. Torrance: Comp. Fluids 1 (1973) 289-300.
- 8) W. J. Grabowski & S. A. Berger: J. Fluid Mech. 75 (1976) 525-544.
- 9) J. K. Harvey: J. Fluid Mech. 14 (1962) 585-592.
- 10) D. L. I. Kirkpatrick: Aeronaut. Res. Counc. CP 821 (1964).
- 11) T. Sarpkaya: J. Fluid Mech. 45 (1971) 545-559.
- 12) J. H. Faler & S. Leibovich: Phys. Fluids 20 (1977) 1385-1400.

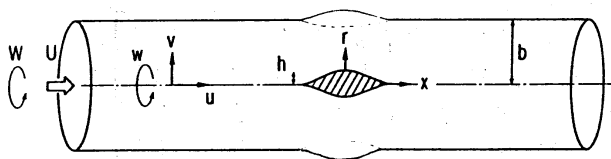


図1 旋回流の概念図. 長い円管に左から旋回流が流れ込む. 中心軸上の物体, もしくは円管壁の一部の変形による波の励起を考える.

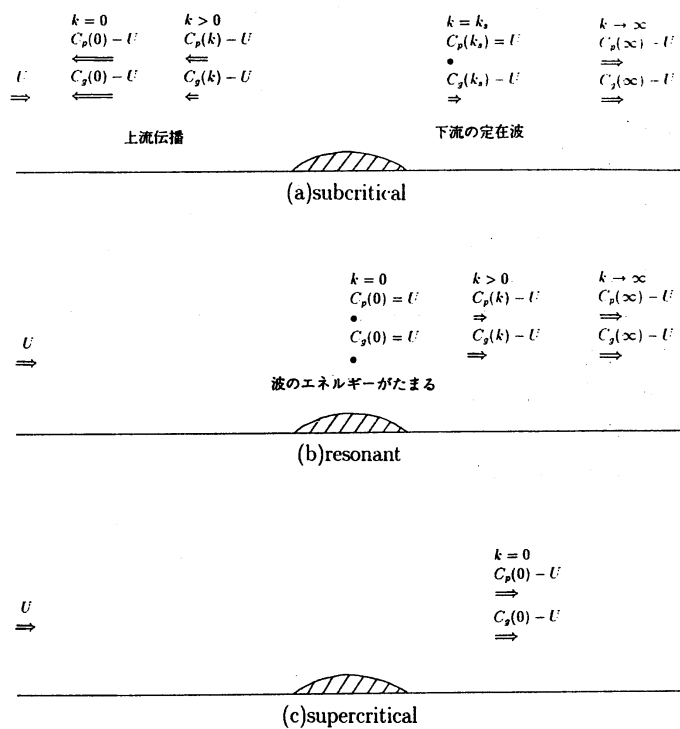


図2 線形理論にもとづく, 物体による波の励起と伝播の状況. (a)subcritical, (b)resonant, (c)supercritical.

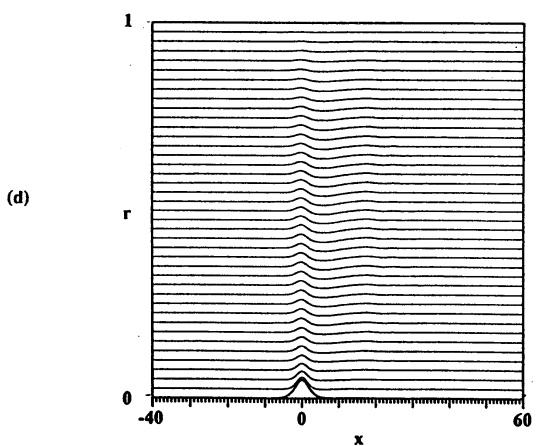
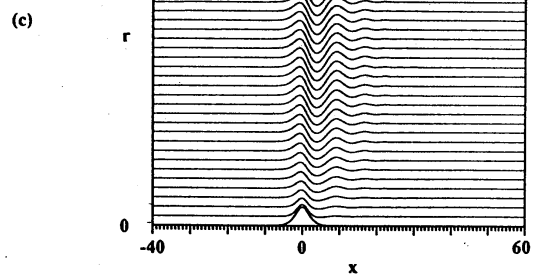
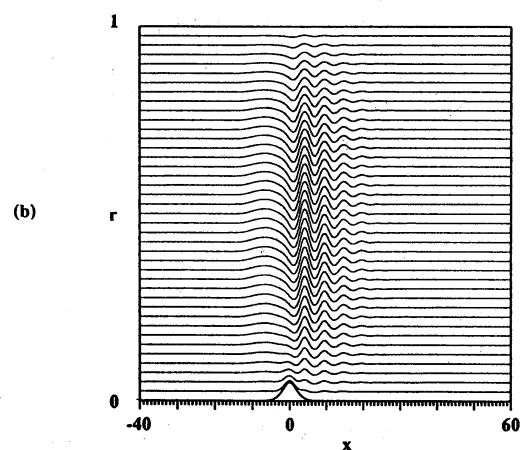
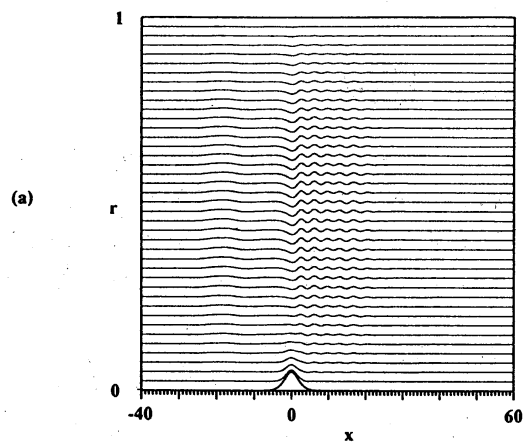


図3 旋回流速が剛体回転 (中心軸上物体) の場合のナビエ・ストークス方程式の解から得られる, 時刻 $t = 200$ における流れ線. (a) $F = 0.9$, (b) $F = 0.95$, (c) $F = 1.0$, (d) $F = 1.05$.

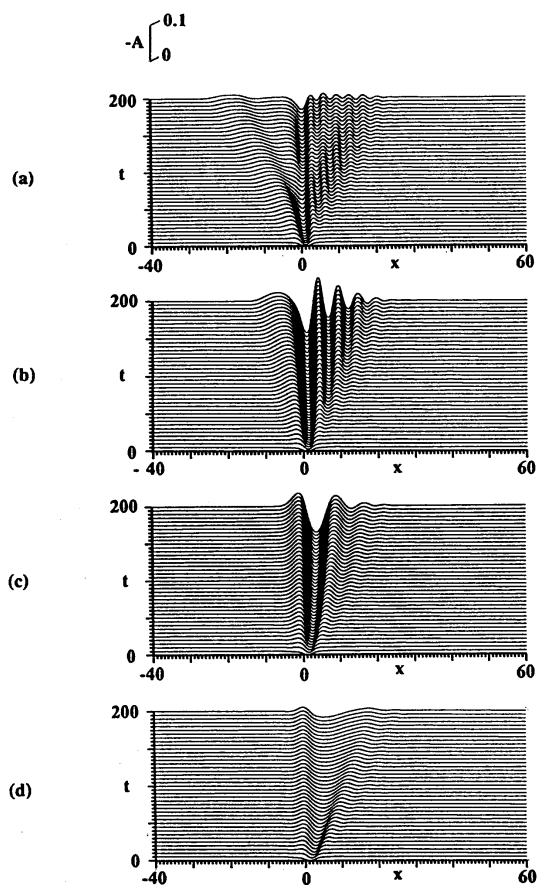


図4 旋回流速が剛体回転 (中心軸上物体) の場合にナビエ・ストークス方程式の解から得られる振幅 A の時間発展 (図3に対応). (a) $F = 0.9$, (b) $F = 0.95$, (c) $F = 1.0$, (d) $F = 1.05$.

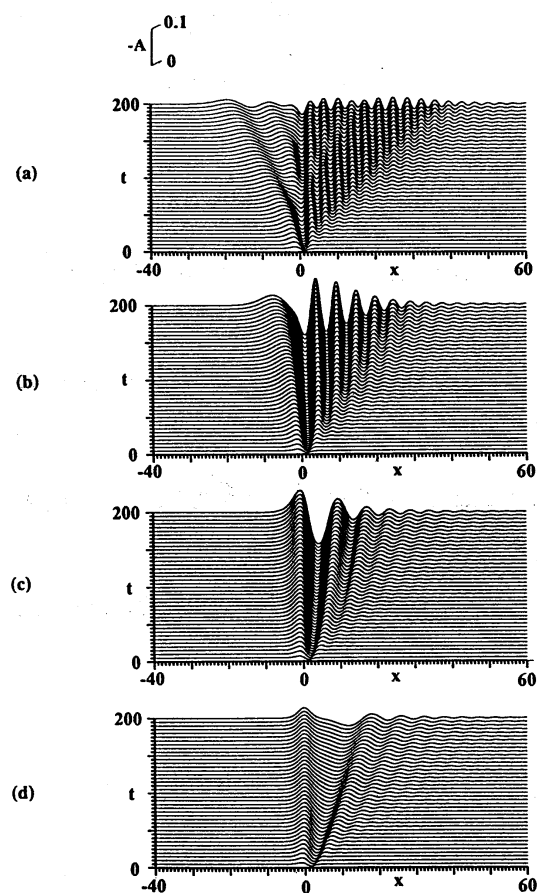


図5 旋回流速が剛体回転 (中心軸上物体) の場合にGrimshaw-Yi方程式の解から得られる振幅 A の時間発展 (図4に対応). (a) $F = 0.9$, (b) $F = 0.95$, (c) $F = 1.0$, (d) $F = 1.05$.

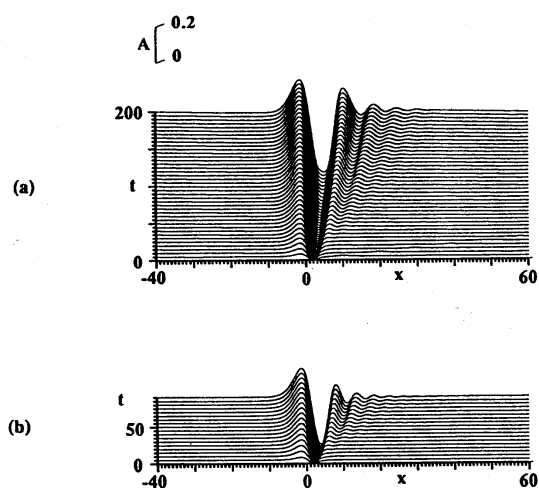


図6 旋回流速が剛体回転 (円管壁の一部がへこんでいる) の場合の振幅 A の時間発展. (a) ナビエ・ストークス方程式の解, (b) Grimshaw-Yi の方程式の解. Grimshaw-Yi の方程式の解は $t = 92.45$ で砕波を予測し, それ以降の時間発展は計算できない.

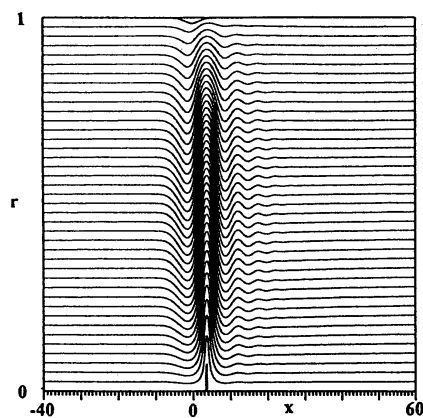


図7 図6(a)(ナビエ・ストークス方程式の解)で中心軸方向の主流の逆流 (砕波) が生じ, 中心軸上に渦 ($x = 3.5$) が発生した直後 ($t = 115$) の流線.

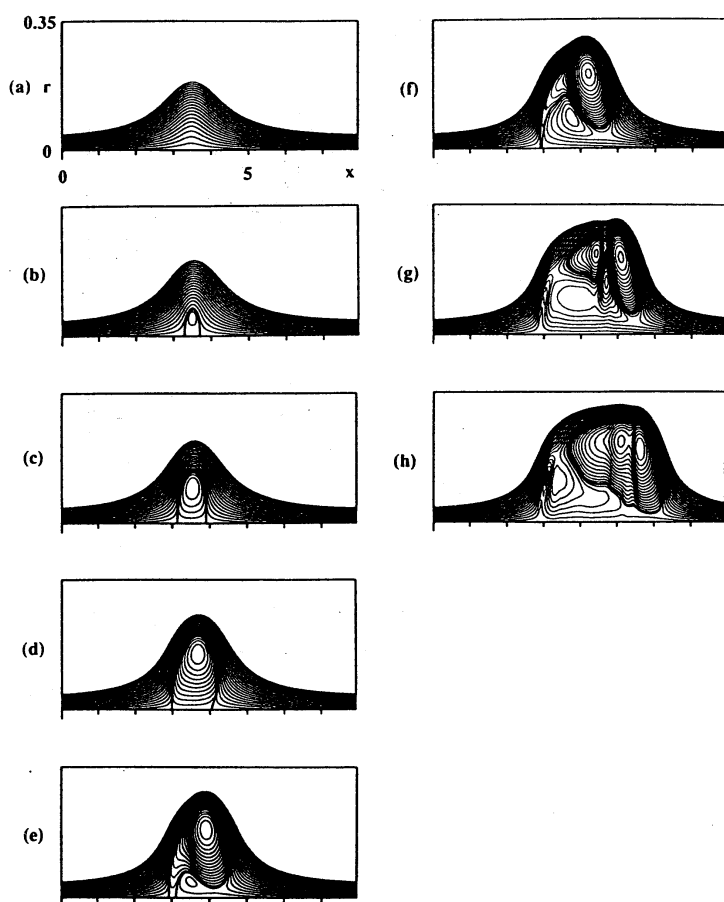


図8 図6(a)(ナビエ・ストークス方程式の解)で中心軸方向の主流の逆流(砕波)が生じ、中心軸上に渦が発生する直前以降の中心軸付近の流線の時間発展。(a) $t = 110$, (b) $t = 115$, (c) $t = 120$, (d) $t = 130$, (e) $t = 140$, (f) $t = 150$, (g) $t = 175$, (h) $t = 200$.

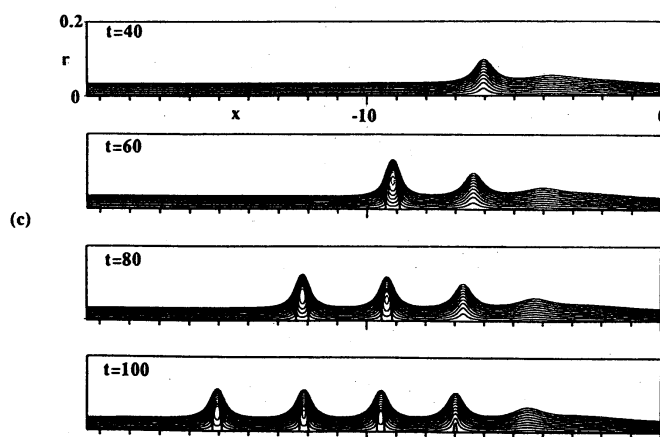
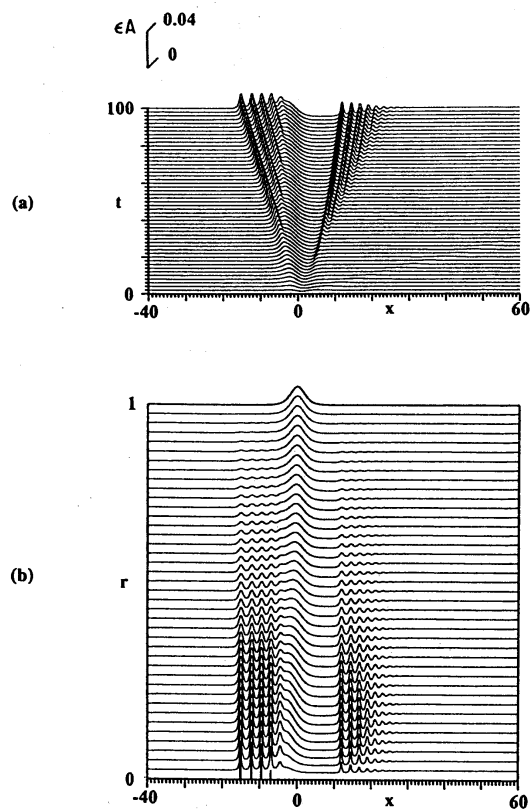


図9 旋回流速がバーガス渦型(円管壁の一部が影らんでいる)の場合のナビエ・ストークス方程式の解から得られた(a)波の振幅 A の時間発展, (b) 時刻 $t = 100$ における流線, (c) 上流中心軸付近の流線の時間発展.

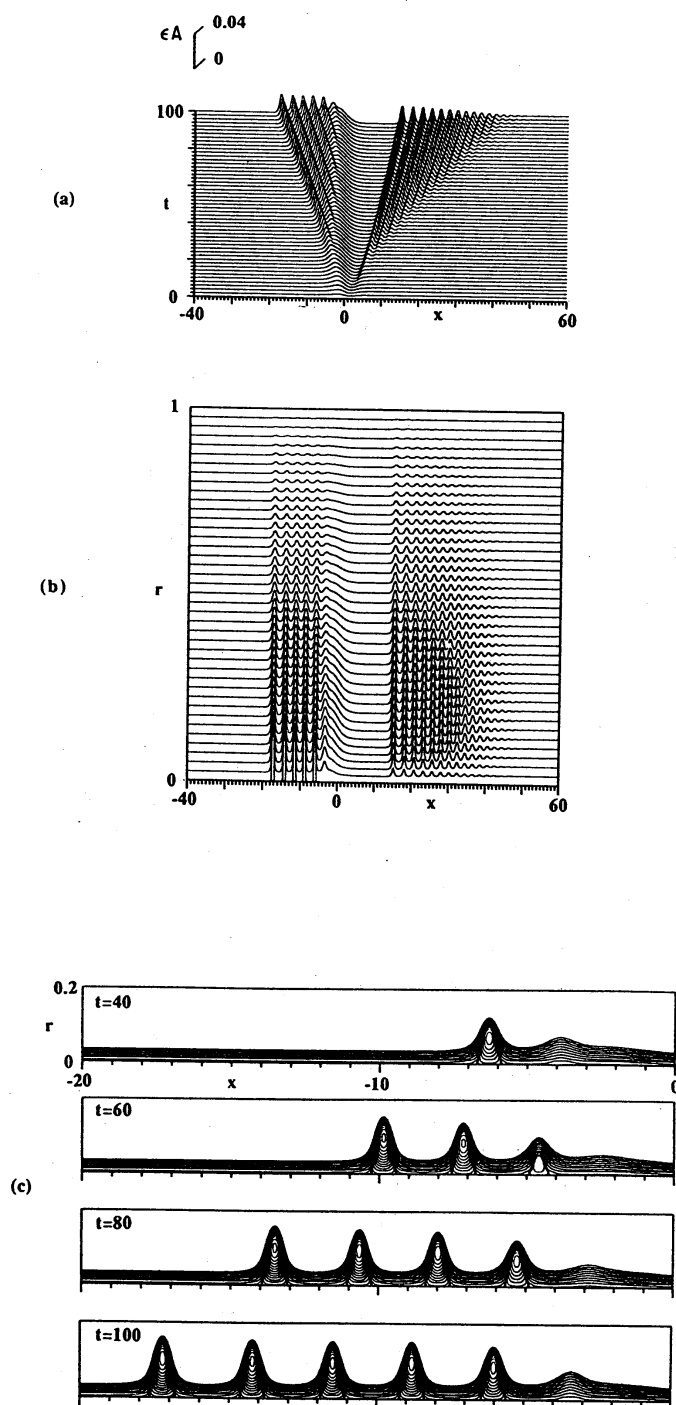


図10 旋回流速がバーガス渦型 (円管壁の一部が彫らんでいる) の場合の forced KdV 方程式の解から得られた (a) 波の振幅 A の時間発展, (b) 時刻 $t = 100$ における流線, (c) 上流中心軸付近の流線の時間発展.